В. А. СУРОВЦЕВ

Ф. П. Рамсей и программа логицизма

<Фрагменты>

Парадокс Рассела и простая теория типов

Разделим все классы на нормальные и ненормальные. Под нормальными классами будем понимать такие классы, которые не содержат самих себя в качестве элементов. Например, класс чайных ложек сам не является чайной ложкой, и, значит, он — нормальный. Но вот класс предметов, не являющихся чайными ложками, сам не является чайной ложкой и, значит, содержит сам себя в качестве элемента, являясь ненормальным классом. В этом же смысле можно говорить о нормальных и ненормальных функциях или предикатах, определяющих соответствующие классы. Теперь возьмем класс всех нормальных классов и зададим вопрос, а каким, нормальным или ненормальным, является сам этот класс. При любом ответе на этот вопрос мы приходим к противоречию. В экстенсиональных терминах Рассел формулирует свой парадокс следующим образом:

Пусть w *— это* класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс x, ‘x есть w’ эквивалентно ‘x не есть x. Поэтому, если x придать значение w, то ‘w есть w’ эквивалентно ‘w не есть w’.

Этот парадокс формулируется также и интенсионально в терминах функций. Так, в письме к Фреге Рассел пишет: «Вы утверждаете, что функция может быть неопределяемым элементом. Я тоже так считал, но теперь этот взгляд кажется мне сомнительным из-за следующего противоречия: Пусть w будет предикатом “быть предикатом, не приложимым к самому себе”. Приложим ли w *к* самому себе? Из любого ответа вытекает противоречие. Стало быть, мы должны заключить, что w не является предикатом. Также не существует класса (как целого) тех классов, которые, как целое, являются членами самих себя. Отсюда я заключаю, что при определенных обстоятельствах определяемое множество не образует целого»*.

Необходимо отметить, что в рамках теории множеств, развиваемой Г. Кантором, парадокс Рассела не был первым, хотя остальные парадоксы и были менее известны. Здесь достаточно упомянуть парадокс Бурали-Форти, касающийся ординального числа всех ординальных чисел, или парадокс Кантора относительно кардинального числа класса всех кардинальных чисел. Парадоксы Кантора и Бурали-Форти касались бесконечных множеств, поэтому казалось, что подобные противоречия связаны с неправильной трактовкой бесконечности и могут быть преодолены ее соответствующей интерпретацией. Парадокс Рассела показал, что дело не в бесконечности, парадоксы могут быть сформулированы в самых простых понятиях.

Для программы логицизма в фрегеанской трактовке парадокс Рассела был фатальным. Действительно, это противоречие важно, как минимум тем, что оно было сформулировано в терминах теории конечных классов, которая рассматривалась как связующее звено логики и математики. Оказалось, что противоречия обнаруживаются не только в тех областях математики, которые затрагивают бесконечные множества. Парадокс Рассела показывает, что дело не в порядке с самыми простыми понятиями, если они приняты некритически. Определение числа у Фреге демонстрирует, каким образом, начиная с теории конечных классов, можно свести математику к логике, поскольку конечный класс всегда можно отождествить с объемом понятия. Но если и здесь есть противоречия, то либо неверна математика, либо отказывают наши познавательные установки, формальным выражением которых является обычно принимаемая логика.

Рассел никогда не сомневался в двух вещах: во-первых, математика верна; во-вторых, верен метод логицизма, т. е. предложенный Фреге проект выведения математики из логики. Из этих двух положений может следовать только то, что неверной является обычная трактовка логики. Что здесь не удовлетворяет Рассела? Обычная логика, как традиционная (субъектно-предикатная), так и созданная Фреге истинностно-функциональная, исходит из того, что подлежащим высказывания может быть все что угодно. Рассел же считает, что это не так. Свое несогласие он впервые выражает в книге «*Основания математики*» (1903), формулируя теорию типов, считая, правда, приведенную здесь формулировку «лишь черновым наброском». Впоследствии этот набросок получил название простой теории типов. Конструктивная часть этой теории сводится к огра-

* *Frege G.* Philosophical and Mathematical Correspondence. Oxford, 1980. P. 130.

ничениям на построение определенных объектов и запрету рассматривать их как аргументы соответствующих пропозициональных функций.

В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу, низшему, чем сам класс. Так, если α, β суть элементы, относящиеся к типу *n*, то образованные из них классы $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и т. д. будут относиться к типу $\eta + 1$. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т. д. Пусть *a, b, c...* — индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$... образуют второй тип, классы $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$... — третий тип и т. д.

Рассел формулирует следующее ограничение на образования подобных объектов: В рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из элементов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции типа $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}\}$ и т. п. Данное ограничение действительно предотвращает источник парадокса, так как оно запрещает образовывать классы, являющиеся элементами самих себя. В этом смысле понятие ненормального класса является незаконно образованным.

Поскольку каждый класс задается с помощью функций, это решение легко воспроизвести и на этом уровне. Индивиды, т. е. элементы первого типа, являются аргументами функций, относящимся ко второму типу; сами эти функции могут быть аргументами функций следующего типа и т. д. В данном случае ограничение касается запрета образовывать функции, аргументами которых являются функции того же самого типа. Следовательно, точно так же, как класс не может быть своим собственным элементом, так и функция не может быть своим собственным аргументом, т. е. конструкции типа $f(f\dot{x})$ являются незаконными.

Простая теория типов блокирует парадокс Рассела в различных его формулировках, рассматривая конструкции, на которых он основан, бессмысленными образованиями. Более того, в рамках простой теории типов нельзя воспроизвести парадоксы Бурали-Форти, Кантора и им подобные, поскольку каждый из них основан на допущении, что класс может быть своим собственным элементом. Казалось, математика, основанная на теории классов и далее на логике, при заданных ограничениях спасена. Но для Рассела простая теория типов действительно оказалась лишь черновым наброском.

Принцип порочного круга, определимые классы и разветвленная теория типов

Прежде, чем перейти к дальнейшему развитию теории типов, следует указать, чем не удовлетворял Рассела ее первый вариант. В качестве узловых укажем две причины:

1. Наличие других парадоксов, которые не разрешались простой теорией типов.
2. Неудовлетворенность понятием класса, которое Рассел стремится рассматривать как производное, а не как исходное, что связано с преимуществами интенсионального, а не экстенсионального подхода к совокупностям предметов.

Интересно то, что обе эти причины оказались связанными настолько тесно, что указать, которая из них послужила источником разветвленной теории типов, практически невозможно. И тем не менее мы начнем с первой, поскольку она имеет объективный исторический источник, тогда как вторая укоренена в философских представлениях собственно Рассела.

Парадоксы, имеющие логический характер, т. е. основывающиеся на форме и истинностном значении высказываний, были известны давно. Самым старым из таких противоречий является так называемый «парадокс Лжеца». Допустим, кто-то говорит: «Я сейчас лгу». Попытка оценить истинность и ложность этого высказывания при любом ответе приводит к противоречию. Если оно истинно, то в силу выраженного им содержания его значение является ложным; если же оно ложно, то отрицает свое собственное содержание и, стало быть, является истинным. В рамках простой теории типов этот парадокс не разрешим <...>

С точки зрения Рассела все парадоксы, возникающие в процессе рассуждения и затрагивающие значение используемых в рассуждении терминов, связаны с неправильной логикой. Таковыми являются как парадокс Греллинга, так и парадоксы, указанные в предыдущем параграфе. Раз они имеют один и тот же источник, значит, они должны иметь одинаковое решение. Это решение результируется в так называемой разветвленной теории типов, которая получает оформление в основополагающей статье Рассела *«Математическая логика, основанная на теории типов»* (1908), идеи которой были развиты в «Principia Mathematica». Источник парадоксов Рассел находит в их «общей характеристике, которую мы можем описать как самореферентность или рефлексивность, заключающуюся в том, что «в каждом противоречии нечто говорится о *всех* случаях некоторого рода, и из того, что говорится, по-видимому, производится новый случай, который как относится, так и не относится к тому же самому роду, что и те случаи, *все* из которых рассматривались в том, что было сказано»[*].

Действительно, если мы обратимся к приведенным парадоксам, то все они указывают на общность, которая в качестве элемента включает предмет исходной формулировки. Так, «парадокс Рассела» в класс классов, не имеющих себя в качестве элементов, включает сам себя; «парадокс Лжеца» в общность оцениваемых высказываний включает само высказывание об оценке; «парадокс Греллинга» рассматривает термины, в которых производится различие на классы выражений, как включенные в сами эти классы. Аналогичные замечания относятся и к другим упомянутым парадоксам.

Впрочем, этот источник одним из первых указал А. Пуанкаре. Из этого источника вытекает и принцип решения парадоксов. Формулируя этот принцип, и характеризуя его как «принцип порочного круга», Рассел говорит, что он «приводит нас к правилу: “То, что включает *все* из совокупности, не должно быть элементом совокупности”; или, наоборот: “Если определенная совокупность, при условии, что она обладает целостностью, имела бы элементы, определимые только с точки зрения этой целостности, то эта совокупность не обладает целостностью”»[**], подразумевая, что все то, что нарушает это правило, является бессмысленным.

В данной формулировке этот принцип является чисто отрицательным, поскольку он не дает критерий, какие конструкции считать осмысленными. Положительный критерий задается в рамках разветвленной теории типов, но допустимые в ней конструкции зависят от представлений Рассела о том, как можно задать совокупность, общность или класс элементов, выступающих подлежащим какого-то высказывания. Это требует рассмотрения второй из указанных выше причин дальнейшего развития теории типов.

Существенную роль здесь имеет ряд соображений, имеющих сугубо философский характер. Учитывая эту особенность, будем отталкиваться от работы Рассела *«Введение в математическую философию»* (1918), в которой наиболее рельефно подчеркивается этот аспект. Там говорится буквально следующее: «Класс или совокупность могут быть определены двумя способами, которые кажутся совершенно отличными друг от друга. Мы можем пронумеровать все его члены <...> или же я могу упомянуть определяющее свой-

---

[*] *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск, 2007. С. 24.

[**] Там же. С. 25.

ство <...> Определение, которое перечисляет, называется “экстенсиональным” определением, а то, которое упоминает определяющее свойство, называется “интенсиональным”. Из этих двух определений интенсиональное является логически более фундаментальным. (1) Экстенсиональное определение может быть всегда сведено к интенсиональному, и (2) интенсиональное определение не может быть, часто теоретически, сведено к экстенсиональному»*.

В контексте предыдущих замечаний это означает: класс философов мы, например, можем задать перечислением, указав, что к тому классу относятся *Сократ, Платон, Аристотель* и т. д. Подобный экстенсиональный способ задания класса — работа не только кропотливая, но и неблагодарная, поскольку всегда можно пропустить элемент, который должен входить в этот класс. Работа историков философии, особенно древней философии, постоянно демонстрирует эту возможность. Действительно, простое перечисление характеризуется тем недостатком, что какой-то из элементов может быть пропущен. Здесь мы уже и не говорим, что перечисление нельзя применить для необозримых классов и тем более для классов бесконечных. Даже если предположить пусть и не бесконечное, но достаточно продолжительное существование человеческого рода, мы не сможем экстенсионально определить класс философов, который, как и человеческий род, может оказаться как необозримым, так и бесконечным.

Из подобного рода соображений Рассел делает вывод, что гораздо удобнее, и более правильно, задавать класс через определяющее свойство, т. е. интенсионально, которое принадлежит его элементам. Как бы мы ни понимали свойство «быть философом», оно однозначно задает совокупность имеющих его элементов. В этом отношении свойство первичнее класса, поскольку свойству всегда соответствует класс, тогда как не всегда возможно задать класс с тем, чтобы не указать свойство, которому удовлетворяли бы все его элементы, и только они. В этом отношении Рассел считает, что свойство, задающее класс, является более фундаментальным, чем общность образующих этот класс элементов.

Здесь следует отметить еще один момент, имеющий непосредственное отношение к собственно философским представлениям Рассела. У него не вызывает сомнения наличие самостоятельно существующих (или, в его терминологии, сабсистентных) вещей, гораздо хуже дело обстоит с образованными из них классами. Если существование *Сократа, Платона* и *Аристотеля* подтверждено опытом, то существование состоящего из них класса вывести из опы-

* Там же. С. 77.

та нельзя. Классы являются результатом абстракции, а потому для Рассела представляют собой фикции, т. е. производные от элементов образования, которые мы можем создать, основываясь на общем свойстве последних. И действительно, в непосредственном знакомстве нам никогда не может быть дана общность {*Сократ, Платон, Аристотель...*}. Например, если нам известна конкретная береза, конкретный дуб, конкретная сосна и т. д., это еще не означает, что мы ориентируемся в лесу, который они образуют, хотя это и может быть так. Но с философами дело обстоит сложнее. Этот класс, при здравом размышлении, всегда отличается неполнотой или неизвестным нам разнообразием.

Обобщая данный пример, можно сказать, что для Рассела понятие о произвольной совокупности элементов менее понятно, чем понятие о некотором задающем эту совокупность свойстве. Так, если класс людей, являющихся философами, через перечисление задать трудно, то задать его же через указание свойства «быть философом» удобно, поскольку этому свойству будут удовлетворять не только те элементы, о которых нам известно, но и те, которые мы пропустили, и даже те, которые могут появиться в будущем. Таким образом, при объяснении общностей или классов, исходными являются не классы и индивиды, из которых они состоят, но свойства и индивиды, которые ими обладают. Другими словами, первичными для Рассела являются не классы, но свойства, которыми могут обладать индивиды и которые задают соответствующий класс.

Интенсиональное задание классов особенно важно в связи с определением чисел. Как считает Рассел экстенсиональный подход здесь не подходит минимум в трех отношениях: «Во-первых, числа сами образуют бесконечную совокупность и не могут, следовательно, быть определены перечислением. Во-вторых, совокупности, имеющие данное число терминов, сами, по предположению, образуют бесконечную совокупность <...> В-третьих, мы должны определить “число” таким образом, чтобы были возможны бесконечные числа»*.

Действительно, даже если использовать фрегеанский подход к определению числа, то бесконечную совокупность конструкций типа ‘Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}...’ нельзя задать перечислением. Ее можно задать лишь через указание порождающего ее свойства, как и поступает Фреге, использующий функцию ‘$x \neq x$’ для задания первого элемента данного ряда. Более того, каждому из элементов этой конструкции во взаимно однозначное соответствие может быть сопоставлена бесконечная общность классов, характеризующих-

* Там же. С. 78–79.

ся равной численностью элементов. Так, числу два соответствует не только класс спутников Марса, но и класс афинских тираноборцев, класс биологических родителей данного ребенка и т. д. вплоть до бесконечности. Перечислить такие классы за конечное число шагов невозможно, их можно лишь задать через определяющее свойство, а именно свойство ‘иметь заданное количество элементов’, что уже предполагает определение числа в указанном двумя предложениями выше первом отношении. Ситуация еще более осложняется, если мы переходим к попытке определить бесконечные числа. Как мы видели, весьма затруднительно задать бесконечную совокупность классов с конечным количеством элементов, но если и элементов оказывается бесконечность, то, как считает Рассел, выход один — указать определяющее свойство, поскольку мы должны быть способны говорить о числе терминов в бесконечной совокупности, и такая совокупность должна определяться интенсионально, т. е. через свойство, общее всем ее членам и свойственное только им.

Следуя Расселу, получается, что о классах вообще, конечных или же бесконечных, мы можем говорить только тогда, когда известно определяющее эти классы свойство. В этом отношении свойство является более примитивным элементом, чем класс, и именно оно должно рассматриваться в качестве исходного. Эту мысль Рассел проводит и на уровне функций. Определяющему свойству всегда соответствует пропозициональная функция, областью значения которой является истина, когда аргументами выступают элементы определимого данным свойством класса. В символике «Principia Mathematica» Рассел подчеркивает эту близость, обозначая свойство, соответствующее функции *fa* как *fx*, когда необходимо говорить о самом свойстве, которое может выступать аргументом другой функции.

Итак, определяющие свойства и, стало быть, функции по отношению к классам первичны, это как раз и приводит к разветвленной теории типов. Все дело в том, что один и тот же класс можно задать с помощью различных пропозициональных функций. Так, например, примем допущение, что философы, и только они, являются мудрецами. Тогда функции «*x* — философ» и «*x* — мудрец» будут выполняться для одних и тех же аргументов и, следовательно, определять один и тот же класс. С точки зрения простой теории типов эти две функции будут относиться к одному и тому же типу, и мы можем обозначить их как *fx* и *gx*. Но с другими случаями дело обстоит не так просто. Возьмем два высказывания: «Сократ — философ» и «Сократ имеет все свойства философа». Первое из них образовано из функции вида *fx*, но относится ли к такому виду второе? Отметим, что во втором высказывании присутствует выражение «все», указывающее на некоторую общность, правда, общность не индивидов, но свойств. Тем не менее это выражение относится к логическим элементам конструкции и при неверном подходе может привести к тем самым рефлексивным недоразумениям, о которых говорилось выше.

В высказывании «Сократ имеет все свойства философа» функция, место индивидной переменной в которой занимает *Сократ* (т. е. функция «x имеет все свойства философа»), включает еще одну переменную, которая пробегает по свойствам философа, какими бы мы себе их ни представляли. Например, ее место могут занимать такие признаки, как честность, стремление идти до конца, логичность и т. п. Таким образом, исходная функция, пробегающая по индивидам, включает еще одну функцию, область пробега которой представляет собой класс свойств. Правда, здесь следует учитывать, что индивидная переменная и переменная свойств играют в исходной функции разную роль.

Это различие связано с тем, что Рассел называет действительной и мнимой (или кажущейся) переменной. Действительная переменная предполагает *какое-то* значение, которое может изменяться, и с его изменением будет меняться и все высказывание. Кажущаяся же переменная не предполагает изменение высказывания, поскольку рассматриваются все ее возможные значения. Следуя Расселу, «если ϕx — пропозициональная функция, то посредством ‘$(x).\phi x$’ мы будем обозначать пропозицию “ϕx всегда истинно”. Сходным образом ‘$(x, y).\phi(x, y)$’ будет обозначать “$\phi(x, y)$ всегда истинно” и т. д. Тогда различие между утверждением всех значений и утверждением какого-то значения есть различие между (1) утверждением $(x).\phi x$ и (2) утверждением ϕx, где x не определен. Последнее отличается от первого тем, что оно не может трактоваться как одна определенная пропозиция»*.

В нашем примере роль действительной переменной играет индивидная переменная, поскольку замена *Сократа* на другие индивиды будет приводить к изменению высказывания, но переменная, указывающая на свойства, подразумевает их все, и, стало быть, пробег этой переменной никакого влияния на высказывание не оказывает. Здесь имеется в виду, что для любого свойства, если оно является свойством философа, то Сократ им обладает. Поэтому, функция «x имеет все свойства философа» должна рассматриваться как $(f).\phi(f\dot{x}, x)$, где $f\dot{x}$ пробегает по свойствам философов и является мнимой (кажущейся) переменной, ax — действительной переменной.

* Там же. С. 28.

Для Рассела очевидно, что конструкция типа $(f).\phi(f\hat{x}, x)$ (далее будем обозначать ее как Fx) существенно отличается от конструкций типа fa, хотя они и могут задавать один и тот же класс. Здесь необходимо обращать внимание не только на тип аргумента, как было в простой теории типов, но и на порядок функции, который определяется структурными элементами, из которых она построена. Функции «x — философ» и «x имеет все свойства философа» относятся к разным порядкам, поскольку вторая из них, помимо действительной индивидной переменной, включает переменную, хотя и мнимую, относящуюся к другому типу, чем тип индивидной переменной. Рассел следующим образом разводит порядки: «Функция, аргументом которой является индивид и значением которой всегда является пропозиция первого порядка, будет называться функцией первого порядка. Функция, включающая первопорядковую функцию или пропозицию в качестве мнимой переменной, будет называться второпорядковой функцией и т. д.»*.

В разветвленной теории типов при установлении порядка fx и Fx необходимо обращать внимание не только на тип аргумента x, но и на характер построения f и F. Поэтому, несмотря на сходство аргументов, функции fx и Fx относятся к разным порядкам.

Таким образом, различие между простой и разветвленной теорией типов состоит в следующем. Как указывалось выше, для различения типов функций в простой теории типов достаточно установить различие в типе их аргументов. В разветвленной теории типов различие функций определяется к тому же порядком мнимых переменных, используемых при их построении. Поэтому если с точки зрения простой теории типов fx и Fx относятся к одному и тому же типу, то в разветвленной теории типов они относятся к разным порядкам, поскольку при их построении используются разные типы аргументов. В данном случае, если индивиды относятся к типу 0 и x — индивидная переменная, то fx и Fx — к типу 1, но при этом fx относится к порядку 1, а Fx — к порядку 2.

Согласно порядку функций, соответствующую иерархию образуют и построенные из них высказывания. Элементарные высказывания (т. е. атомарные высказывания плюс истинностные функции атомарных высказываний) в совокупности с высказываниями, содержащими в качестве мнимых переменных только индивидные переменные, образуют первый логический тип. Высказывания, в качестве мнимых переменных включающие высказывания и функции первого логического типа, образуют общность, относящуюся ко второму логическому типу и т. д. В общем случае высказывания, вклю-

* Там же. С. 40.

чающие в качестве мнимых переменных высказывания и функции типа *n,* образуют общность типа $n+1$.

Обратимся теперь к парадоксам. Источником парадоксов Рассел считает неограниченное использование функций вида *Fx,* в структуру которых входит указание на общность, заданную мнимыми переменными, относящимися к типу более высокому, чем тип их действительных аргументов. Именно они приводят к «рефлексивным или самореферентным недоразумениям», поскольку включенное в них указание на общность может в том числе подразумевать и сами эти функции. В этом случае функция *Fx* может оказаться значением включенной в нее мнимой переменной. Так, вернемся к примеру с функцией *‘x* имеет все свойства философа’. Здесь свойство *иметь все свойства философа* само является свойством философа и, значит, может быть значением мнимой переменной *fx* в *Fx,* равной переменной *(f).* Т. е. здесь мы получаем порочный круг, так как *Fx* рассматривается как одно из возможных значений *fx,* которое уже включено в ее же структуру. Таким образом, использование мнимых переменных в структуре функций необходимо ограничить, с тем чтобы конструкции, в которых функции могли бы предполагать сами себя в качестве аргументов, считались не истинными и не ложными, но бессмысленными. Для этого Рассел предлагает выход, аналогичный простой теории типов. Он ограничивает область пробега мнимых переменных определенным типом.

Дальнейшее развитие теории типов связано с понятием предикативной функции, которую Рассел определяет следующим образом: «Функция от одной переменной, относящаяся к порядку, следующему за порядком ее аргумента, будет называться *предикативной* функцией; такое же название будет даваться функции от нескольких переменных, если среди этих переменных есть переменная, в отношении которой функция становится предикативной, когда значения приписываются всем другим переменным»[*].

Если вернуться к нашим примерам, то *fx* является предикативной функцией от *x,* тогда как функция $Fx =_{\mathrm{def}} (f).\phi(f\dot{x}, x)$ не является предикативной функцией от *x*, так как включает переменную $f\dot{x}$, более высокого типа, чем *x*. Предикативные функции образуют строгую иерархию порядков, которая зависит от той общности, которую они предполагают.

Все функции, с помощью которых построены атомарные высказывания, в указанном выше смысле, и высказывания, построенные из атомарных с помощью логических союзов (т. е. элементарные высказывания), являются предикативными функциями от инди-

[*] Там же. С. 40.

видов. Они образуют общность, в которую входят функции вида fx, $\sim fx$, $fx \vee gx$, $fa \supset gx$, где x — индивидная переменная. Предикативные функции от индивидов Рассел обозначает как ‘$f!x$’ и относит их к первому порядку. Предикативные функции первого порядка образуют определенную целостность, и $f!x$ может быть преобразована в мнимую или кажущуюся переменную.

Функции, которые в свою структуру включают указание на другие свойства, относятся к более высоким порядкам. Так, функция $(f).\phi(f\dot{x}, x)$ включает указание не только на индивиды, но и на общность их свойств. Такие функции не являются предикативными функциями от x и относятся ко второму порядку. Но они являются предикативными функциями от функций первого порядка, и их можно записать в виде ‘$!(f!\,\dot{x})$’. Функции второго порядка сами образуют целостность, выступая аргументами некоторой другой предикативной функции уже третьего порядка. Этот ряд можно продолжить далее до бесконечности.

Предикативность четко фиксирует порядок функции через указание совокупности ее возможных значений и позволяет ограничить использование мнимых переменных рамками одного типа. Это ограничение Рассел формулирует следующим образом: «В ϕx ϕ нельзя преобразовать в мнимую переменную, поскольку ее тип не определен; но в $\phi!x$, где ϕ является предикативной функцией, чей аргумент относится к некоторому заданному типу, *ϕ можно* преобразовать в мнимую переменную»*.

Так, например, если мы берем функцию «x имеет все свойства философа», то мы не можем преобразовать *свойство философа* в мнимую переменную до тех пор, пока не укажем, что эта функция является предикативной, т. е. пробег мнимой переменной, которую она включает, ограничен типом, ниже ее самой. В этом случае свойство *иметь все свойства философа* относится к порядку, более высокому, чем свойства философа, и не должно включаться в их совокупность.

Поэтому, если конструкция $(f).\phi(f\dot{x}, x)$ и может приводить к недоразумениям, то конструкция $(f).\phi!\,(f\dot{x}, x)$ является вполне законной, поскольку она предикативна, т. е. ограничена определенным типом, и не может включать в область значений fx саму функцию $\mathrm{F}x =_{\mathrm{def}} (f).\ \phi(f\,,x)$. В *PM* ограничение формулируется так: «Мы можем расширить смысл ϕ: функция от x, в которой ϕ входит в качестве кажущейся переменной, имеет, соответственно, расширенное толкование, так что как бы ни была определена ϕ, $(\phi).f!(\phi\,z, x)$ и $(\exists\,\phi).\ f!(\phi\,z, x)$ никогда не могут быть значениями ϕx. Попытка сде-

* Там же. С. 41.

лать их таковыми подобна попытке поймать свою собственную тень. Невозможно получить одну переменную, которая заключает среди своих значений все возможные функции индивидов»[*].

Согласно порядку предикативных функций различается и тип высказываний, которые из них построены. Если считать, что индивиды относятся к типу 0, то высказывания, включающие функции вида *fix,* где мнимые переменные ограничены индивидными переменными, относятся к типу 1, функции вида *ϕ!(f!x),* где мнимые переменные ограничены предикативными функциями 1-го порядка, — к типу 2 и т. д.

Стратификация функций и высказываний в рамках разветвленной теории типов дает Расселу позитивное решение парадоксов, для которых сформулированный выше «принцип Пуанкаре» выступал лишь негативным критерием. Как утверждает Рассел: «Важно заметить, что поскольку существуют различные типы пропозиций и функций и поскольку обобщение может быть применено только в рамках некоторого одного типа, все фразы, содержащие слова “все пропозиции” или “все функции” *prima facie* бессмысленны, хотя в определенных случаях они могут быть интерпретированы как не вызывающие возражений. Противоречия возникают при использовании таких фраз, где нельзя обнаружить простого значения»[**]. Нетрудно видеть, что разветвленная теория типов разрешает все парадоксы, типа «парадокса Рассела», поскольку она сохраняет основной принцип простой теории типов, что функция не может быть своим собственным аргументом. Но, помимо того, она устраняет и остальные парадоксы, о которых выше шла речь. Так, возьмем «парадокс Лжеца». Когда кто-то говорит: «Я сейчас лгу», — это, как считает Рассел, подразумевает: «Существует высказывание типа *n,* которое я утверждаю и которое ложно», но сама эта пропозиция должна относиться к типу $n + 1$ и не может являться значением присутствующей в ней мнимой переменной, на которую указывает выражение «некоторое». И это решает «парадокс Лжеца».

Иными словами, функции *Fx* и *ϕx* относятся здесь к разным порядкам, поскольку *Fx,* в отличие от *ϕx,* не является предикативной функцией от *x*. И, если мы должны выполнить требования разветвленной теории типов и сохранить предикативность мнимой или кажущейся переменной *ϕ,* то включать *Fx* в область ее возможных значений нельзя. Если мы это делаем, то получаем не противоречие, а бессмысленное выражение.

[*] *Уайтхед А. Н., Рассел Б.* Основания математики: в 3 т. Т. 1. Самара, 2005. С. 58.

[**] *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск, 2007. С. 41.

Аксиома сводимости и классы

Предлагаемый Расселом подход к решению парадоксов в рамках разветвленной теории типов на первый взгляд кажется вполне оправданным, если бы он не приводил к некоторым нежелательным следствиям в математике, где ограничение, накладываемое на мнимые переменные, исключает весьма важные способы рассуждения. В условиях выдвинутого ограничения необоснованными оказываются те математические положения, которые предполагают указание на все свойства некоторых элементов или, что то же самое, на все функции от некоторых аргументов, независимо от их порядка. Самыми важными здесь, по-видимому, являются принцип математической индукции и Дедекиндово сечение.

Принцип математической индукции лежит в основании арифметики, поскольку с его помощью устанавливаются общие свойства членов натурального ряда. Его можно сформулировать следующим образом: «Всякое свойство, предполагаемое 0, а также последующим элементом всякого числа, предполагающего это свойство, предполагается всеми числами натурального ряда». Приемлемый в рамках обычной арифметики, этот принцип не соответствует требованиям разветвленной теории типов, поскольку приводит к явным несообразностям.

Действительно, согласно сформулированному выше ограничению, указанная в этом принципе общность свойств должна быть ограничена определенным порядком. Предположим, что эта общность свойств относится к порядку n. Введем теперь свойство *быть конечным числом*, которое согласно этому же принципу формулируется следующим образом: «Конечное число — это число, которое предполагает все свойства, предполагаемые 0, а также последующим элементом, каждого числа, предполагающего это свойство». Однако здесь, в соответствии с разветвленной теорией типов, выражение общности «все» указывает на то, что функция «x — конечное число» относится к порядку $n + 1$. Поскольку мы ограничили принцип математической индукции свойствами порядка n, его нельзя применять к функциям порядка $n + 1$. Стало быть, этот принцип, только что сформулированный для чисел вообще, оказывается неприменимым уже к конечным числам. Мы не можем его использовать даже в таком простом виде, как: «Если $m + 0$ есть конечное число, и если из того, что $m + n$ есть конечное число, следует, что конечным числом является $m + n + 1$, то конечным является $m + n$».

Дедекиндово сечение лежит в основании математического анализа, являясь наиболее удобным способом обоснования теории действительных чисел. Метод Дедекинда требует рассматривать действительные числа с точки зрения разбиения рациональных чисел на совокупности, обладающие определенным свойством. В этом случае действительное число представляет собой функцию, аргументом которой является рациональное число. Поскольку в математическом анализе часто используются положения, требующие указания на общность действительных чисел, то задающие их функции, согласно ограничению, накладываемому разветвленной теорией типов, должны быть ограничены некоторым порядком, допустим n. Тогда любая функция, включающая указание на общность порядка n, сама не будет задавать никакого действительного числа, поскольку будет относиться к порядку $n + 1$.

При таком подходе необоснованными оказываются фундаментальные положения математического анализа, например теорема о существовании верхней границы, утверждающая, что для всякой ограниченной совокупности действительных чисел (или, что то же самое, для каждой ограниченной совокупности задающих их функций) существует действительное число a, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) всякое число выбранной совокупности меньше или равно a; 2) для каждого действительного числа, которое меньше a, есть некоторое действительное число, больше его самого. Нетрудно заметить, что функция, задающая число a, должна относиться к порядку $n + 1$, поскольку указывает на общность функций порядка n. Следовательно, поскольку, как установлено выше, действительные числа задаются функциями порядка n, получается, что a не является действительным числом, и теорема оказывается бессмысленной.

Поскольку Рассел не собирается отказываться ни от математического анализа, ни тем более от арифметики, единственный выход он видит в том, чтобы уравнять порядки функций от одного и того же аргумента. Действительно, в примерах с математической индукцией и теоремой о верхней границе вся проблема заключается в том, что вводимые посредством их функции оказываются на порядок выше, чем функции, об общности которых идет речь в формулировке, хотя они и относятся к одним и тем же аргументам. Следовательно, стоит лишь уменьшить порядок новых функций (а лучше всего эти порядки вообще игнорировать), сохранив различие только в типе аргументов. Каким образом это можно осуществить?

Следуя Расселу, будем называть все функции (независимо от их порядка) формально эквивалентными, если они истинны для одних и тех же аргументов. Формально эквивалентными, например, будут рассмотренные выше функции «x — философ» (т. е. fx) и «x имеет все свойства философа» (т. е. $(f).(\varphi(f\dot{x}) \supset fx)$), хотя они и относятся к разным порядкам, поскольку первая из них является предикативной функцией от x, а вторая — нет. Стоит отметить, что эти функции взаимозаменимы в контексте в том смысле, что построенное с помощью одной из них высказывание сохраняет свою истинность, если мы заменим одну функцию на другую. Например, истинными являются и высказывание «Сократ — философ», и высказывание «Сократ имеет все свойства философа». Таким образом, возможность замены $(f).(\phi(fx) \supset fx)$ на fx уменьшает порядок функции, сохраняя тип аргумента. В общем случае можно предположить, что для любых непредикативных функции от x, относящихся к некоторому порядку, скажем $f_2(x)$, $f_3(x)$ ... $\mathrm{f}_{\mathrm{n}}(x)$. можно отыскать предикативную функцию $f!x$, которая будет им формально эквивалентна, т. е. истинна для тех же самых аргументов.

Согласно данному выше определению, предикативная функция будет лишь по типу отличаться от своего аргумента и не будет порождать тех недоразумений, связанных с различием порядков функций, которые указаны выше в связи со способами математических рассуждений. Поэтому если мы предположим, что для любой функции от x (где x не специфицирован, т. е. может быть как индивидом, так и функцией какого-то порядка) порядка $n + m$ может быть найдена предикативная функция от x (т. е. относящаяся к порядку n), то проблема будет решена.

Это предположение Рассел формулирует в виде «Аксиомы сводимости»: каждая пропозициональная функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции. Как утверждается: «Посредством этого предположения порядок непредикативной функции может быть понижен на единицу; следовательно, после некоторого конечного числа шагов мы будем в состоянии получить из любой непредикативной функции формально эквивалентную предикативную функцию»*.

Для функций «x — философ» и «x имеет все свойства философа» содержание этой аксиомы очевидно, но как сделать его очевидным для всех других случаев? Где гарантия, что подобная предикативная функция есть?

Такую гарантию Рассел находит в том, что формально эквивалентные функции задают один и тот же класс. Поэтому, в общем случае, все такие функции заменимы единственной функцией, а именно, «x есть элемент класса a». Эта функция, очевидно, является предикативной, поскольку ее аргумент всегда лишь одним порядком ниже ее самой. И хотя Рассел считает классы фикциями, оказывается, что эти фикции весьма удобны, коль скоро речь идет об уменьшении порядка функций. Более того, единственным разумным основанием введения классов он считает то, что они обеспечивают очевидность

* *Уайтхед А. Н., Рассел Б.* Основания математики: в 3 т. Т. 1. Самара, 2005. С. 134.

аксиоме сводимости. В частности, он утверждает, что если и возможен некоторый метод сведения порядка пропозициональной функции, не воздействующий на истинность и ложность ее значений, то здравый смысл достигает этого только введением классов <...>

Впрочем, следует отметить, что аксиома сводимости основана на отождествлении всех формально эквивалентных функций с некоторыми предикативными функциями, тогда необходимо предполагать, что и первые, и вторые даны изначально. Т. е. все свойства, посредством которых можно интенсионально задать класс предметов, уже присутствуют, когда мы устанавливаем их наличие у определенных предметов. В этом случае, если бы у нас был способ однозначного отбора предикативных свойств из всех возможных свойств, то необходимость в аксиоме сводимости также отпала бы. Однако такая способность к дифференциации свойств зависела бы от определенных эпистемологических способностей человека, которую, хотя и можно предполагать, но в рамках математики, как она представлена с точки зрения разветвленной теории типов, обосновать можно только аксиоматически.

Как бы там ни было, аксиоматическое сведение порядков различных функций от одного и того же аргумента через отождествление их с предикативной функцией от того же самого аргумента означает только то, что разветвленная теория типов сводится к простой теории типов, как она сформулирована выше. Действительно, из всех различий порядков функций аксиома сводимости оставляет только то, чтобы предикативная функция (формально эквивалентная всем функциям от одного и того же аргумента) была на порядок выше своего аргумента. Это означает лишь то, что предикативная функция не может быть своим собственным аргументом и, соответственно, класс, который задается данной функцией, не может быть своим собственным элементом.

Из аксиомы сводимости вытекает одно весьма важное следствие: если понятие предикативной функции тождественно понятию класса, то построение формальной теории можно начинать не с индивидов и свойств, а с классов. Но отождествление предикативных функций с классами возвращает нас к проблемам, которые были сформулированы в начале предыдущего параграфа. Первая из них связана с более широкой совокупностью парадоксов, для решения которых и была предназначена разветвленная теория типов. Вторая проблема относится к тому, каким образом задаются классы, если мы исходим из интенсионального подхода, т. е. считаем, что класс задается свойством, пусть и предикативным.

Остановимся на первой проблеме. Поскольку аксиома сводимости позволяет отождествить функции различных порядков с предикативными функциями, может возникнуть подозрение, что вновь объявятся парадоксы, которые обсуждались в предыдущем параграфе. Однако здесь следует учесть, что Рассел ограничивает применение аксиомы сводимости лишь высказываниями математики. Он считает, что при формулировке парадоксов второй группы задействуются понятия, не имеющие к математике никакого отношения. Поэтому если мы ограничимся лишь математическими положениями, суть которых Рассел видит в их экстенсиональности, т. е. в неразличимости формально эквивалентных функций, то проблем не возникает. Действительно, если считать, что сущность математики заключается в общности выражений, то все содержательные различия, связанные с порядком функций, исчезают. Так, если мы задаем класс некоторых предметов, то для математики важно лишь то, чтобы он был задан однозначно, а какие при этом используются функции — безразлично. Допустим, например, что нас интересует класс из n элементов, и оказалось, что элементы этого класса являются философами. Для того чтобы задействовать этот класс в вычислительных процедурах, совершенно безразлично, с помощью какой функции мы его зададим, «x — философ» (т. е. fx) или «x имеет все свойства философа» (т. е. $(f).\ \phi(f\dot{x} \supset fx)$). Все преобразования с классами, например установление взаимно однозначного соответствия или операции пересечения и объединения, будут сохраняться.

Конечно, как показал Рассел, введение классов само не свободно от парадоксов. Но аксиома сводимости сохраняет простую теорию типов, поскольку требование предикативности функции, задающей класс, указывает на то, что сама эта функция не может быть своим собственным аргументом. То есть парадоксы, типа парадокса Рассела, не проходят и с принятием этой аксиомы.

Зачем тогда все-таки понадобилась разветвленная теория типов? Здесь мы выскажем некоторые соображения. Если бы Рассел изначально ограничился математикой, то разветвленная теория типов была бы не нужна. Но он начинает с более общих проблем, а именно, с проблем непарадоксального языка. Разветвленная теория типов — это не теория математики. Это более общая теория, которая стремится согласовать способы выражения с их непротиворечивостью. Математика же использует частный язык, который получается посредством ограничения общих средств непротиворечивых выражений. Аксиома сводимости для Рассела как раз и есть такой способ ограничения, с помощью которого мы из обычных средств выражения получаем то, что можно сказать на языке математики. Можно утверждать, что аксиома сводимости — это самая философская концепция Рассела, касающаяся математики, ибо именно она сводит любые средства выражения к выражениям математики или, скорее, указывает на то, что считать выражением математики, предполагая некоторые упрощения в его структуре.

Итак, проблема, связанная с парадоксами, решается, поскольку парадоксы первого вида исключены структурой предикативных функций, а парадоксы второго вида исключены тем, что математика ограничивается использованием любой функции из формально эквивалентных. Остается вторая проблема: каким образом однозначно задаются классы, если исходить из интенсионального подхода, т. е. считать, что класс задается свойством, и при этом, согласно аксиоме сводимости, считать, что всякое свойство эквивалентно какому-то предикативному свойству?

Следствия для аксиом бесконечности и мультипликативности

Ответ на вопрос, которым заканчивался предыдущий параграф, достаточно прост, если учесть, что основная цель «Principia Mathematica» заключается в сведении основных понятий математики к логике. Аксиома сводимости, несмотря на все усложнения, связанные с различением порядка функций, позволяет вернуться к классам, с точки зрения которых как раз и можно определить понятие числа. Начнем с классов.

Используя аксиому сводимости для задания классов в рамках логицистского подхода к математике, мы теперь можем обойтись только предикативными функциями. Каждой такой функции $\phi!x$ соответствует класс $z\ \{\varphi z\}$, т. е. класс тех элементов, для которых функция ϕx является истинной. Например, функция «*x* — философ, отравленный по решению афинского собрания» будет задавать класс *{Сократ}*, а функция «*x* — афинские тираноубийцы» будет задавать класс *{Аристогитон, Гармодий}*, поскольку первая является истинной только для *Сократа,* а вторая — только для *Аристогитона и Гармодия.*

В общем случае, если ϕ является переменной, тогда для каждого ее значения будет задаваться некоторый класс, содержащий определенное количество элементов. Так, если значением ϕ является f, то класс $z\ \{fz\}$ может состоять из n элементов, а если значением ϕ является g, то класс $z\ (gz)$ может состоять из m элементов и т. д. Например, классом $z\ \{fz\}$ может быть класс $\{a, b\}$, а классом $z\ \{gz\}$ класс $\{a, b, c\}$ и т. д.

Более того, поскольку нас интересуют исключительно классы, то можно обойтись лишь одной из формально эквивалентных функций, так как соответствующие формально эквивалентным функциям классы совпадают. Символически последнее утверждение рассматривается Расселом как отличительная черта классов, которая означает, что функции, истинные для одних и тех же аргументов, задают один и тот же класс. Например, функции «x — философ, отравленный по решению афинского собрания» и «x — учитель Платона» будут задавать один и тот же класс, а именно *{Сократ}*. При экстенсиональном подходе, где важным является только однозначное задание класса, во всех случаях можно обойтись единственной функцией, игнорируя все другие, формально ей эквивалентные. Таким образом, каждому классу мы можем сопоставить одну-единственную задающую его функцию.

Причем такую функцию необязательно задавать содержательно, т. е. указывая на общее всем элементам класса свойство. Достаточно лишь указать на сами элементы. Такое указание можно получить, задав функцию, уравнивающую возможные значения своей переменной с элементами класса. Например, класс афинских тираноубийц можно задать так: $\dot{x}$ *{x = Аристогитон* v *x = Гармодий}*. Нетрудно заметить, что заданный таким образом класс будет совпадать с любым другим классом, заданным посредством свойств, характерных только для *Аристогитона и Гармодия*.

Все это облегчает задачу Рассела по сведению математики к логике. Следует, правда, учесть требования теории типов и четко различать порядок элементов, которые могут образовывать классы. Любое высказывание об отношении между классами будет осмысленно только тогда, когда их элементы относятся к одному и тому же типу. Более того, не существует одного нулевого и универсального классов. Последние также различаются согласно типам, есть нулевой и универсальный классы для типа индивидов, для типа классов индивидов, для типа классов классов индивидов и т. д. В общем, здесь сохраняются все требования простой теории типов.

Ограничиваться конечными числами Рассел не желает как минимум по двум причинам. Во-первых, при конечности чисел возникают недоразумения с аксиоматизацией арифметики, предложенной Дж. Пеано и которую Рассел считает наиболее пригодной для выразимости математических понятий в сугубо логических терминах; во-вторых, проблематичными становятся введенные Г. Кантором бесконечные кардинальные числа.

Что здесь вызывает возражения? Непосредственными следствиями аксиоматики Пеано являются утверждение о единственности 0 и то, что он не является последующим элементом никакого другого числа, а также утверждение о том, что никакие два числа не имеют в качестве последующего элемента одно и то же число. Допустим теперь, что индивиды, имеющие место в мире, ограничены числом n. Тогда с числами, следующим за n, при попытке определить их с точки зрения находящихся во взаимно однозначном соответствии классов, всегда будет соотнесен ∅, поскольку таких классов нет. Таким образом, получается, что за $n + 1$ и за $m + 1$ (при условии, что $m > n$) следует одно и то же число, которое к тому же является 0, а это противоречит всем принципам принятой аксиоматики.

Правда, если бы мы ограничились лишь конечными кардинальными числами, этим возражением можно было бы пренебречь, поскольку, образуя из индивидов классы, классы классов и т. д. в ряду натуральных чисел, мы всегда могли бы продвинуться далее. Основная проблема заключается в том, что конечность имеющих место в мире вещей не позволила бы определить канторовские бесконечные числа, типа N 2^{N0}, поскольку они предполагают существование всего натурального ряда. А получить весь такой ряд, пусть даже и последовательным образованием классов, в силу указанных выше причин мы не можем.

Единственный выход, который из этой ситуации находит Рассел, заключается в предположении, что бесконечность исходных элементов, т. е. индивидов, дана изначально. Это положение формулируется в качестве аксиомы, так называемой «Аксиомы бесконечности», которая в формулировке Рассела гласит, что ни один конечный класс индивидов не содержит всех индивидов.

Непосредственным следствием этой аксиомы является то, что существуют классы, содержащие любое конечное число индивидов. Отсюда нетрудно перейти к определению бесконечных кардинальных чисел. Действительно, поскольку каждое конечное число в результате определяется как класс классов индивидов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, то бесконечное кардинальное число, которое соотнесено с натуральным рядом (т. е. Ко), будет определяться как число класса всех конечных чисел натурального ряда. Число 2^{N0}, которое Г. Кантор считает следующим за N_0 бесконечным кардинальным числом, будет определяться как класс классов конечных кардинальных чисел и т. д.

С точки зрения классов можно определить не только числа, но и арифметические операции: сумму, произведение, возведение в степень и т. д. Возьмем, например, сумму. Начнем с того, что поскольку число есть класс классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, то, согласно сказанному выше относительно формально эквивалентных предикативных функций, в качестве представителя некоторого числа можно выбрать один из таких классов. Тогда разумно предположить, что сумма двух кардинальных чисел будет определяться как класс всех тех классов, которые находятся во взаимно однозначном отношении с классом, объединяющим элементы их представителей. Например, если класс *{a, b, c}* есть представитель числа 3, а класс *{d, e}* есть представитель числа 2, то представителем суммы этих чисел (т. е. числа 5) будет класс *{a, b, c, d, e}*. Важно здесь только то, чтобы представители классов не перекрывались. Действительно, если в данном примере, скажем, *and* совпадали бы, то мы не получили бы требуемую сумму, которая тогда была бы равна 4. Поэтому необходимо задать условие неперекрываемости классов. При отборе представителей это условие можно задать, например, с помощью введенной выше функции $x \neq y$, где x пробегает по элементам первого представителя, а y — второго.

Определение суммы можно расширить так, чтобы под него подпадали не только конечные, но и бесконечные числа. Возьмем два бесконечных неперекрывающихся класса. Поскольку из них нужно образовать новый класс, для определения числа которого нельзя обойтись механическим слиянием их элементов, то мы можем поступить следующим образом. При образовании нового класса будем следовать принципу отбора, при котором его нечетные элементы будем брать из первого класса, а четные — из второго. Так мы получим требуемое бесконечное кардинальное число. Такое определение позволяет складывать любое конечное число бесконечных классов. Важно также и то, что под определение через принцип отбора подпадает сложение не только бесконечных, но и конечных кардинальных чисел. Достаточно лишь после выполнения процедуры отбора, если конечные числа были неравны, оставшиеся элементы последнего класса механически добавить к остальным.

Соответствующую процедуру можно задать и для произведения кардинальных чисел. Допустим, нам нужно перемножить все те же классы *{a, b, c}* и *{d, e}*. Из элементов этих классов мы можем образовать новые классы, удовлетворяющие следующему условию отбора: каждый из этих классов содержит в точности по одному элементу из первоначальных классов. Класс этих классов будет представлять собой конструкцию вида *{{a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, e}, {b, e}, {c. e}*. Нетрудно заметить, что число этого класса как раз и будет соответствовать произведению исходных чисел.

Подобный подход к произведению нетрудно обобщить на произвольное конечное число множителей. Пусть класс κ — это конечный класс множителей (удовлетворяющих условию неперекрываемости, которое, как и в случае с суммой, задается с помощью функции $x \neq y$). Тогда можно образовать класс (будем обозначать его как κ_μ и, следуя Расселу, будем называть его мультипликативным классом κ), включающий все те классы, которые содержат в точности по одному элементу первоначальных классов. Число мультипликативного класса κ_μ как раз и будет определять произведение элементов класса κ. Процедура здесь будет вполне аналогична той, что применялась в предыдущем абзаце к случаю двух классов с фиксированным количеством элементов. Более того, поскольку на класс κ не накладывалось ограничение, что его элементы должны быть конечными, такое определение применимо и к произведению бесконечных классов. Подобным образом вводится операция возведения в степень, так как ее можно определить через произведение.

Можно показать, что введенные таким образом операции удовлетворяют всем свойствам, которые требуются арифметикой кардинальных чисел, как конечных, так и бесконечных, но только в том случае, если арифметические операции применяются конечное число раз (неважно, применяются они к конечным или же к бесконечным кардинальным числам). Доказательство этого факта является механической процедурой. Затруднение возникает тогда, когда эти операции используются бесконечное количество раз (неважно, применяются ли они к конечным или же бесконечным кардинальным числам). Это становится особенно ясно, когда мы четко осознаем, что смысл самих операций тесно связан с принципом отбора, согласно которому упорядочиваются элементы суммируемых классов или образуется мультипликативный класс κ_μ.

Принцип отбора можно осуществить механически в случае конечного применения операций, но для бесконечных суммы, произведения или возведения в степень такой механический прием невозможен в силу характера самой бесконечности. Действительно, если складывается бесконечное количество классов, необходимо предполагать, что есть принцип отбора, задающий, какой элемент какого класса брать четным, какой элемент какого класса брать кратным четному, какой элемент какого класса брать нечетным, какой элемент какого класса брать кратным нечетным и т. д. Сама по себе процедура сложения этого определить не может. То же самое касается умножения. Образование мультипликативного класса κ_μ подчинено механической процедуре только в том случае, если количество элементов класса κ конечно. В противном случае за конечное число шагов невозможно проследить, что образованный класс κ_μ удовлетворяет условию отбора составляющих его элементов. В этом случае любой из элементов κ_μ станет необозримым, а тогда будет невозможно определить, удовлетворяет ли он принципу отбора, в соответствии с которым образуется сам мультипликативный класс κ_μ.

Таким образом, сам по себе принцип отбора, если он должен охватывать бесконечность применения операции, не вытекает из того, каким свойствам должна удовлетворять операция. Наоборот, если нам нужна операция, удовлетворяющая принципам оперирования с любыми кардинальными числами, как конечными, так и бесконечными, то должно быть задано условие отбора, не зависящее от того, рассматриваем ли мы конечные классы, бесконечные классы, сумму конечных классов, сумму бесконечных классов или бесконечную сумму как конечных, так и бесконечных классов. Это же условие касается произведения.

Но поскольку условие выбора, сформулированное в предыдущем параграфе, очевидно, нельзя обосновать как механическую процедуру при условии бесконечности шагов, Рассел вводит его как аксиому, а именно, аксиому мультипликативности: для всех взаимно неперекрывающихся классов, из которых ни один не является нулевым, имеется по крайней мере один класс, который имеет один и только один термин, общий с каждым из данных классов. Эта аксиома мотивирована тем, что Рассел не принимает бесконечный принцип механического отбора, но, как указывалось выше относительно предпочтительности интенсионального способа задания классов, предполагает, что бесконечность, в том числе бесконечный отбор, следует задавать интенсионально, т. е. через определяющее свойство.